Вып. 12 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

1981

М.Е.Д е е в

О ПОВЕРХНОСТЯХ $V_{p,\kappa} \subset P_n$, НЕСУЩИХ СОПРЯЖЕННУЮ К-ТКАНЬ ($\kappa < p$)

Известно, что не всякая поверхность V_p проективного пространства P_n несет сопряженную сеть. Существование на $V_p \subset P_n$ сопряженной к-ткани ($\kappa < p$) является более слабым требованием на поверхность. Так, например, любая $V_p \subset P_n$, в каждой точке которой соприкасающееся пространство имеет размерность $2p$, несет, по крайней мере, сопряженную 2-ткань [2]. В настоящей работе изучается геометрия р-мерной поверхности, несущей сопряженную к-ткань ($\kappa < p$) в пространстве P_n.

Рассмотрим р-мерную поверхность V_p в n-мерном проективном пространстве P_n. Относительно присоединенного к ней подвижного репера первого порядка эта поверхность задается системой:

$$\omega^\alpha = 0 \qquad (\alpha, \beta = p+1, \dots, n), \tag{1}$$

при продолжении которой имеем:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \quad (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha,\ i,j = 1,2,\dots,p). \tag{2}$$

Асимптотические квадратичные формы поверхности:

$$\Phi^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j. \tag{3}$$

Определение I. Будем говорить, что поверхность $V_p \subset P_n$ несет сопряженную к-ткань, если через каждую ее точку $A = A_0$ проходит к ($\kappa < p$) линий, направления которых линейно независимы, попарно сопряжены относительно асимптотических форм (3) и на этой поверхности не существует m ($m > \kappa$) полей попарно сопряженных направлений.

Пусть поверхность $V_p \subset P_n$ несет сопряженную к-ткань. Будем обозначать ее $V_{p,\kappa}$. Поместим точки A_a ($a, b, c = 1, \dots, \kappa$) репера на касательных к линиям сопряженной к-ткани. Тогда

$$b_{ab}^\alpha = 0 \qquad (b \neq a) \tag{4}$$

и система (2) примет вид:

$$\omega_a^\alpha = b_{\underset{\smile}{aa}}^\alpha \omega^{\underset{\smile}{a}} + b_{ae}^\alpha \omega^e, \qquad \omega_e^\alpha = b_{ei}^\alpha \omega^i \quad (e, f = \kappa+1, \dots, p) \tag{2'}$$

(по индексам, подчеркнутым знаком $\smile$, суммирования нет).

Формы ω_a^i ($i \neq a$) становятся теперь главными:

$$\omega_a^i = a_{aj}^i \omega^j \qquad (i \neq a). \tag{5}$$

Очевидно, что к-ткань на поверхности $V_{p,\kappa} \subset P_n$ определяет на ней к-мерное распределение Δ_κ. Зададим на поверхности $V_{p,\kappa}$ произвольное дополнительное до касательной плоскости $T_p(A)$ ($p-\kappa$)-мерное распределение $\Delta_{p-\kappa}$ и поместим в площадку $\Delta_{p-\kappa}(A)$ точки A_e репера. Тогда формы ω_e^a станут главными:

$$\omega_e^a = a_{ej}^a \omega^j. \tag{6}$$

На касательных к линиям ω^a сопряженной к-ткани мы можем, как в работе [1], рассматривать псевдофокусы F_a^b ($b \neq a$), соответствующие смещениям точки A вдоль других линий ω^b ($b \neq a$) к-ткани. Можно показать, что положение псевдофокусов F_a^b при заданном распределении $\Delta_{p-\kappa}$ не зависит от положения и нормировки вершин A_a на касательных, точек A_e в площадке распределения $\Delta_{p-\kappa}$ и от выбора поля нормалей первого рода.

Потребуем наличие хотя бы одного фокуса на касательной AA_a к линии ω^a сопряженной к-ткани. Если точка $P = tA + A_a$ – фокус, то из условия $(dP, A, A_a) = 0$ получим:

$$t\omega^b + a_{aj}^b \omega^j = 0, \qquad (b \neq a)$$
$$t\omega^e + a_{aj}^e \omega^j = 0, \tag{7}$$
$$b_{\underset{\smile}{aa}}^\alpha \omega^{\underset{\smile}{a}} + b_{ae}^\alpha \omega^e = 0. \tag{*}$$

Имеем следующие возможности:

а) Направление ω^a имеет максимальный индекс [3], т.е. $\operatorname{rang} \| b_{aa}^\alpha, b_{ae}^\alpha \| = p - \kappa + 1$.

Тогда система (*) имеет только тривиальные решения $\omega^a = 0$, $\omega^e = 0$ (a -фиксировано, $e = \kappa+1, \dots, p$). В этом случае фокусы могут получаться только при смещении точки A в ($\kappa-1$)-мерном направлении $\omega^a = 0$, $\omega^e = 0$, принадлежащем касательной плоскости $[A, A_1, \dots, A_\kappa]$ сопряженной к-ткани. Для того, чтобы система (7) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\left\| \begin{matrix} t\delta_c^{b} + a_{ac}^{b} \\ a_{ac}^{e} \end{matrix} \right\|$

(a, b, c) -различны) был меньше $k-1$. Поэтому надо потребовать, чтобы были равны нулю все миноры этой матрицы порядка $k-1$. Тогда получим систему алгебраических уравнений относительно одной неизвестной t:

$$f_\xi(t) = 0 \qquad (\xi = 1, 2, \ldots, \ell \leq C_{p-1}^{k-1}). \qquad (8)$$

Совместность системы (8) является необходимым и достаточным условием фокальности семейства касательных AA_a. При $p \geq 2k-1$ некоторые из уравнений (8) не содержат t и будут налагать определенные требования на поверхность.

Имеем следующие частные случаи:

Теорема I. Если направление ω^a сопряженной к-ткани на поверхности $V_{p,k} \subset P_n$ имеет максимальный индекс $p-k+1$, а касательная к нему при смещении точки A по поверхности в направлении $\omega^a = 0$, $\omega^e = 0$ $(e = k+1, \ldots, p)$ инфинитезимально не выходит из касательной плоскости к-ткани, то семейство касательных AA_a фокальное с $k-1$ фокусами.

Следствие. Если поверхность $V_{p,k} \subset P_n$ расслаивается на ∞^{p-k} к-мерных поверхностей, несущих сопряженные сети из линий ткани, и все направления ω^a сопряженной к-ткани имеют максимальный индекс $p-k+1$, то каждое из семейств касательных AA_a -фокальное с $k-1$ фокусами.

б) Направление ω^a имеет не максимальный индекс:

$$\operatorname{rang} \| b_{aa}^{\alpha}, b_{ae}^{\alpha} \| = \tau < p-k+1.$$

Тогда фундаментальная система для (*) состоит из $m = p-k+1-\tau$ решений и определяет m-мерное направление, сопряженное направлению ω^a, не содержащее касательных к остальным $k-1$ линиям ткани. Выберем распределение Δ_{p-k} так, чтобы это m-мерное направление принадлежало площадке $\Delta_{p-k}(A)$. Тогда в площадке $\Delta_{p-k}(A)$ выделится m-мерная плоскость, в которую мы поместим первые m точек из A_e репера. Система (7) запишется:

$$\begin{gathered} (t\delta_c^{b} + a_{ac}^{b})\omega^c + a_{ae_1}^{b}\omega^{e_1} = 0, \\ a_{ac}^{e_1}\omega^c + (t\delta_{f_1}^{e_1} + a_{af_1}^{e_1})\omega^{f_1} = 0, \qquad (9) \\ a_{ac}^{e_2}\omega^c + a_{ae_1}^{e_2}\omega^{e_1} = 0, \\ (e_1, f_1 = k+1, \ldots, k+m, \ e_2 = k+m+1, \ldots, p). \end{gathered}$$

это система $p-1$ линейных однородных уравнений с $p-\tau$ неизвестными. Для того, чтобы она имела ненулевые решения, нужно потребовать, чтобы все миноры порядка $p-\tau$ ее матрицы были равны нулю. Получим систему алгебраических уравнений относительно t:

$$f_\eta(t) = 0 \qquad (\eta = 1, 2, \ldots, s \leq C_{p-1}^{p-\tau}). \qquad (10)$$

Совместность системы (10) является необходимым и достаточным условием фокальности семейства касательных AA_a. Выделяется следующий частный случай.

Теорема 2. Если направление ω^a сопряженной к-ткани на поверхности $V_{p,k} \subset P_n$ имеет индекс $\tau < p-k+1$, а касательная к нему при смещении точки A по поверхности в сопряженном направлении $\omega^{e_2} = 0$, $\omega^a = 0$ (a-фиксировано, $e_2 = p-\tau+2, \ldots, p$) инфинитезимально не выходит из плоскости $[A, A_b, A_{e_1}]$ $(b = 1, \ldots, k)$, то семейство AA_a фокальное с $p-\tau$ фокусами.

Следствие I. Если индекс направления ω^a сопряженной к-ткани равен единице, то на касательной AA_a имеется максимальное число фокусов $p-1$.

Следствие 2. Направление ω^a сопряженной к-ткани имеет индекс равный единице тогда и только тогда, когда на поверхности $V_{p,k}$ существует сопряженное ему распределение Δ_{p-k}.

Соприкасающаяся двумерная плоскость к линии ω^a сопряженной к-ткани есть плоскость $[A, A_a, a_{aa}^{b}A_b + a_{aa}^{e}A_e + b_{aa}^{\alpha}A_\alpha]$.

Определение 2. Будем говорить, что сопряженная к-ткань на поверхности $V_{p,k} \subset P_n$ имеет ось, если соприкасающиеся плоскости всех линий ткани пересекают нормаль первого рода по прямым. Плоскость, натянутая на все эти прямые, называется осью сопряженной к-ткани.

Имеет место

Теорема 3. Для того, чтобы для данной сопряженной к-ткани на поверхности $V_{p,k} \subset P_n$ существовала ось, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rang} \| b_{aa}^{\alpha} \| = \operatorname{rang} \| b_{aa}^{\alpha}, a_{aa}^{i} \|$ для каждого фиксированного $i \neq a$ при каком-либо заданном распределении Δ_{p-k}.

Поверхность, несущая сопряженную к-ткань, у которой одно из направлений имеет индекс равный единице, обладает рядом интересных свойств.

Теорема 4. Если направление ω^a сопряженной к-ткани на поверхности $V_{p,k}\subset P_n$ имеет индекс I, то на касательной AA_a к этому направлению инвариантно определяются $p-k$ точек $\mathcal{F}^e_a$ -псевдофокусов, соответствующих смещениям точки A в направлении ω^e $(e=1,2,\dots,k)$, и на поверхности возникает частично сопряженная сеть, содержащая данную сопряжённую к-ткань.

Теорема 5. Если индекс линии ω^a сопряжённой к-ткани на поверхности $V_{p,k}\subset P_n$ равен 1, то на касательной к ней гармонический полюс точки A относительно псевдофокусов совпадает с гармоническим полюсом точки A относительно фокусов [1].

Теорема 6. Если в условиях теоремы 4 сопряжённая к-ткань имеет ось, то в аффинной связности, индуцированной заданием поля нормали первого рода [1], содержащего поле осей, линии сопряженной к-ткани будут геодезическими.

Список литературы

1. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства.-Изв.высш.учеб.заведений.Математика, 1966, №2, с.9-19.

2. Базылев В.Т. Квазилапласовы преобразования р-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства.-Ученые записки МГПИ им.В.П.Потёмкина, 1955, 35, с.261-322.

3. Гейдельман Р.М. О поверхностях, несущих сопряжённые к-ткани.-Изв.высш.учеб.заведений.Математика, 1976, №11, с.101-10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I2 1981

Т.А.Дулалаева

К ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_n

В работе рассматривается пара гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве и изучается геометрия этой пары.

I. Определение. Пусть в проективном пространстве P_n заданы: 1/две диффеоморфные области Ω и $\bar\Omega$, 2/ $(n-1)$-распределения Δ в области Ω и $\bar\Delta$ в области $\bar\Omega$, 3/диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ такой, что $f(A)\notin\Delta(A)$, $\forall A\in\Omega$ и $f^{-1}(B)\notin\bar\Delta(B), \forall B\in\bar\Omega$. Тогда мы скажем, что в пространстве P_n задана пара гиперраспределений $\{\Delta,\bar\Delta\}$.

Присоединим к паре областей $\Omega,\bar\Omega$ подвижные проективные реперы $R=\{A, A_i, A_n\}$ и $\bar R=\{A_n, A_i, A\}$, где $A\in\Omega$, $A_n=f(A)\in\bar\Omega$, $A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$ $(i,j,k=\overline{1,n-1})$. Имеем:

$$\begin{aligned} dA&=\omega^0_0A+\omega^iA_i+\omega^nA_n, & dA_n&=\theta^0_0A_n+\theta^iA_i+\theta^nA,\\ dA_i&=\omega^0_iA+\omega^j_iA_j+\omega^n_iA_n, & dA_i&=\theta^0_iA_n+\theta^j_iA_j+\theta^n_iA,\\ dA_n&=\omega^0_nA+\omega^i_nA_i+\omega^n_nA_n, & dA&=\theta^0_nA_n+\theta^i_nA_i+\theta^n_nA. \end{aligned} \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения, определяющие пару гиперраспределений $\{\Delta,\bar\Delta\}$, имеют вид:

$$\omega^n_i=L_{i\alpha}\omega^\alpha,\qquad \theta^n_i=\bar L_{i\alpha}\theta^\alpha, \tag{2}$$

$$\theta^\alpha=\Lambda^\alpha_\beta\omega^\beta,\qquad (\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Продолжая систему уравнений(2), мы убеждаемся, что системы функций $\{L_{ij},L_{in}\}$, $\{\bar L_{ij},\bar L_{in}\}$ определяют геометрические объекты, названные [2] фундаментальными объектами